ΣΥΜΠΑΓΕΣ ΣΥΝΟΛΟ:

Ενα σύνολο K είναι συμπαγές υποσύνολο των μιγαδικών (σύνολο κλειστό και φραγμένο) εάν για κάθε z_ν υπάρχει z_{k_ν} και $z_0 \in K_0$ ώστε $z_{k_\nu} \to z_0$

Θεώρημα Cantor:

Εστω $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots \supseteq K_\nu \supseteq \dots$

$\operatorname{diam}(K_\nu) \to 0$

$\exists!\ \xi \in \mathbb{C} \quad \xi = \cap K_\nu$

$\Rightarrow K \cap A = \emptyset$

$(\exists \varepsilon > 0)\ |z - w| \geq \varepsilon > 0$

$\forall z \in K \ \&\ w \in A$

Αποδ.

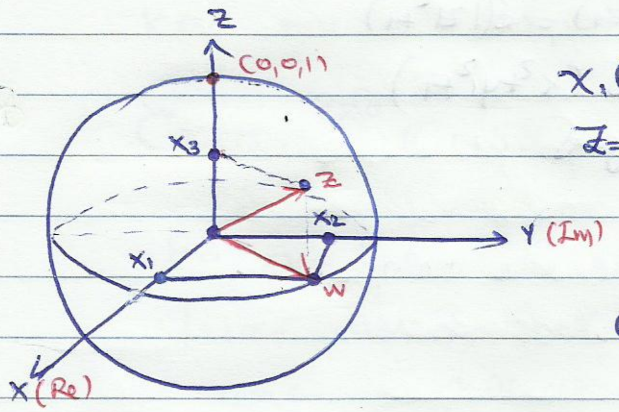
$\frac{1}{\nu}$, $\exists z_\nu \in K \ \&\ w_\nu \in A : |z_\nu - w_\nu| < \frac{1}{\nu}$

$\exists (z_{k_\nu})\ \&\ z_0 \in K : z_{k_\nu} \to z_0 \quad ||z_{k_\nu} - w_{k_\nu}|| < \frac{1}{k_\nu}$

$|w_{k_\nu} - z_0| \leq |w_{k_\nu} - z_{k_\nu}| + |z_{k_\nu} - z_0| < \frac{1}{k_\nu} + \dots \to 0$

Αρα $w_{k_\nu} \to z_0 \in A \cap K \neq \emptyset$ Ατοπο

Αρα η απόσταση απο το A στο K δεν μπορει να 'ναι πιο μικρή



$x_1 O x_2 \equiv \mathbb{C}$

$z = x + iy$ με $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

$$\frac{Bx_3}{BO} = \frac{x_3 z}{Oz} = \frac{Ow}{Oz} = \frac{Ox_1}{Ox} = \frac{Ox_2}{Oy}$$

Ετσι, $\boxed{\frac{1 - x_3}{1} = \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{y}}$

$\frac{x_1}{x} = 1 - x_3$ και $\frac{x_2}{y} = 1 - x_3$

δηλαδη $x_1 = x(1 - x_3)$ & $x_2 = y(1 - x_3)$

Αρα, $x = \frac{x_1}{1 - x_3}$ και $y = \frac{x_2}{1 - x_3}$, $x_3 \neq 1$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \Rightarrow x^2(1-x_3)^2+y^2(1-x_3)^2+x_3^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z|^2(1-x_3)^2 = 1-x_3^2 = (1-x_3)(1+x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow |z|^2(1-x_3) = 1+x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$

Έτσι, $x=\frac{x_1}{1-x_3}=\frac{x_1}{1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}}=\frac{x_1(|z|^2+1)}{2}$

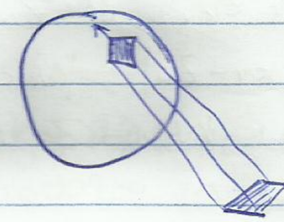
αλλά, $x=\frac{z+\bar{z}}{2}=x_1\frac{|z|^2+1}{2} \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}}$

για x_2 έχουμε $x_2 = y\frac{2}{|y|^2+1} = \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}$

Έστω τώρα $\Pi: S\setminus\{(0,0,1)\}\to \mathbb{C}$ επίπεδο και

$S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$

και το $(\Pi): ax_1+bx_2+\gamma x_3=\delta$



Τότε:

$a\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}\right)+b\left(\frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}\right)+\gamma\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)=\delta$

$a(z+\bar{z})+b(z-\bar{z})+\gamma(|z|^2-1)=\delta(|z|^2+1)$

$2ax+2biy+\gamma(x^2+y^2-1)=\delta(x^2+y^2+1)$

$(\gamma-\delta)(x^2+y^2)+2ax+2by=\gamma+\delta$

- Αν $\gamma=\delta \Rightarrow$ ευθεία
- Αν $\gamma\neq\delta \Rightarrow$ κύκλος

Αποστάσεις σημείων

$\chi(z,w)=|z-w|=\sqrt{(x_1-w_1)^2+(x_2-w_2)^2+(x_3-w_3)^2}$

με $z=(z_1,z_2,z_3)$ και $w=(w_1,w_2,w_3)$

αν σπάσουμε μέσα στα τετράγωνα τότε

$\chi(z,w)=\sqrt{\underbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2}_{1}+w_1^2+w_2^2+w_3^2-2x_1w_1-2x_2w_2-2x_3w_3}=$

$=\sqrt{2(1-(x_1w_1+x_2w_2+x_3w_3))}$ ①

Υπολογίζουμε το υπόριζο με τις σχέσεις που βγάλαμε:

$$\frac{z+\bar z}{|z|^2+1}\cdot\frac{w+\bar w}{|w|^2+1}+\frac{z-\bar z}{i(|z|^2+1)}\cdot\frac{w-\bar w}{i(|w|^2+1)}+\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\cdot\frac{|w|^2-1}{|\ |^2+1}=$$

$$=\frac{(z+\bar z)(w+\bar w)-(z-\bar z)(w-\bar w)+(|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}=$$

$$=\frac{2(z\bar w+wz)-|z|^2-|w|^2+|z|^2|w|^2+1}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}=$$

$$=\frac{(|z|^2+1)(|w|^2+1)+2(z\bar w+w\bar z)}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}.$$

οπότε η σχέση ① γίνεται

$$\frac{2|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}}=X(z,w)$$

Έτσι αν $z=(0,0,1) \Rightarrow X((0,0,1),w)=\frac{2}{\sqrt{|w|^2+1}}$

και αν $X(\infty,w)=\frac{2}{\sqrt{|w|^2+1}}$ //

Έστω, ότι $\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\tilde{\mathbb{C}}$ συμπαγής χώρος

Ελέγχουμε αν είναι κλειστό μέσω επιλογής μιας ακολουθίας $z_1, z_2, z_3, \dots$ αν $z_{k_\nu}=\infty \to \infty$ τότε συγκλίνουσα. Εάν (z_ν) $\nu\geq 100$ φραγμ. τότε $(\forall\nu)(\exists z_{k_\nu})$ τω $|z_{k_\nu}|\geq\nu \Rightarrow X(z_{k_\nu},\infty)=\frac{2}{\sqrt{|z_{k_\nu}|^2+1}}$

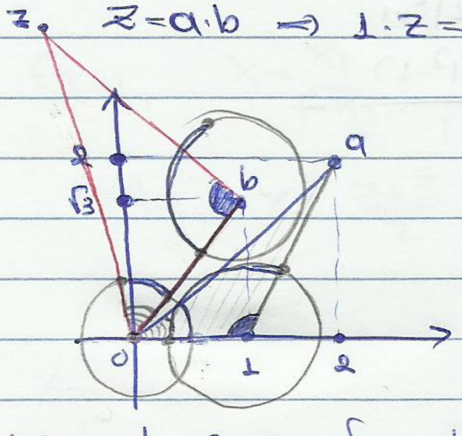
Άρα, φραγμ. και κλειστό $\Rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ συμπαγές

ΩΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ:

1) Εστω $a=2+2i$ και $b=1+i\sqrt{3}$

τοτε:

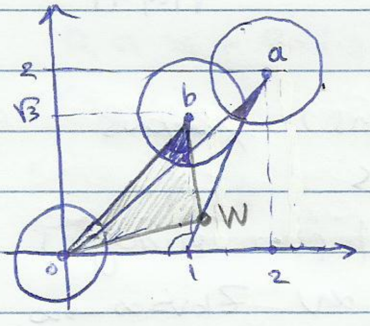
$z=a\cdot b \Rightarrow 1\cdot z=ab \Rightarrow \frac{z}{b}=\frac{a}{1}$



Παίρνω τα τρίγωνα κορυφών $T(0,1,a)$ και $T(0,b,z)$ τότε θα πρέπει να'ναι ομοια. Επειτα σχεδιάζω κυκλο με κεντρο το O και κυκλο με κεντρο το 1 και ιδιο κύκλο με κεντρο το b και θα μετρήσω τα τόξα των γωνιών

ομοια τωρα για τη διαίρεση ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία

Εστω $w=\frac{b}{a}$, $a\neq 0 \Rightarrow w\cdot 1=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{w}{b}$



$T(0,1,a)$ ομοιο με $T(0,w,b)$ φτιαχνω κυκλο κεντρου O μετρω τα τοξα και επειτα φτιαχνω κυκλο κεντρου a και ιδιο κυκλο κεντρου b

2) Δίνεται ενας μη μηδενικος μιγαδικος z. Να προσδιοριστεί ο κλαδος της $\sqrt{z}$ για τον οποιο ισχύει $\sqrt{1}=-1$

Λυση

Τυπος De Moivre

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$ $k=0,1,\ldots,n-1$

Ετσι για ν=2

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) \quad k=0,1$$

$$\sqrt{z} = \begin{cases} k=0, & \sqrt{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = z_1 \\ k=1, & \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{cases}$$

$$= \sqrt{\rho}\cdot\left(-\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= z_2 = -z_1$$

αν $z=1$ τοτε $|z| = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) \Rightarrow \rho=1,\ \theta=0$

άρα για $k=0 \to z_1 = \sqrt{1}\,(\cos 0 + i\sin 0) = 1$ (Απορ).

για $k=1 \to z_2 = -z_1 = -1$ (Δεκτή)